

Тема: «Производная сложной функции»

1. Сложная функция. Начнем с примера.

■ **Пример 1.** Пусть требуется вычислить по заданному значению x соответствующее значение z функции h , заданной формулой

$$z = h(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Для этого надо сначала вычислить по заданному x значение

$$y = f(x) = 1 - x^2,$$

а затем уже по этому y вычислить

$$z = g(y) = \sqrt{y}.$$

Итак, функция f ставит в соответствие числу x число y , а функция g — числу y число z . Говорят, что h есть *сложная функция*, составленная из функций g и f , и пишут:

$$h(x) = g(f(x)).$$

Чтобы вычислить значение сложной функции $h(x) = g(f(x))$ в произвольной точке x , сначала вычисляют значение y «внутренней» функции f в этой точке, а затем $g(y)$.

Если функция f имеет производную в точке x_0 , а функция g имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $h(x) = g(f(x))$ также имеет производную в точке x_0 , причем

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0). \quad (1)$$

■ **Пример** Вернемся к поставленной выше задаче и найдем производную функции $h(x) = (2x + 3)^{100}$.

Функцию h можно представить в виде сложной функции

$$h(x) = g(f(x)), \text{ где } g(y) = y^{100}, y = f(x) = 2x + 3.$$

Так как $f'(x) = 2$ и $g'(y) = 100y^{99}$, имеем

$$h'(x) = 2 \cdot 100y^{99} = 200(2x + 3)^{99}.$$

Пример 2 Найдем производную функции

$$h(x) = \sqrt{3x^2 + 1}.$$

Так как $h(x) = g(f(x))$, где $y = f(x) = 3x^2 + 1$, $g(y) = \sqrt{y}$, то $g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ и $y' = f'(x) = 6x$, откуда

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 + 1}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 1}}.$$

Найдите производные:

а) $h(x) = \cos 3x$;

а) $y = \sqrt{\cos x}$;

в) $h(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$;

а) $h(x) = (3 - 5x)^5$;

в) $y = \operatorname{tg} 2x$;

а) $y = \sqrt{9 - x^2}$;

в) $h(x) = (2x + 1)^7$;

$f(x)$	$f'(x)$
$C - \text{const}$	0
x	1
$Kx + b$	k
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln a$
$\ln a$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Правила вычисления производных

1. $(U + Y)' = U' + Y'$	3. $(U \cdot Y)' = U' \cdot Y + U \cdot Y'$
2. $(k \cdot U)' = k \cdot (U)'$	4. $\left[\frac{U}{Y} \right]' = \left[\frac{U' \cdot Y - U \cdot Y'}{Y^2} \right]$

